# 組合せ最適化: 実践的解法を中心として（確認問題）

柳浦睦憲

## 問題 1

以下の文章はあっているか? 間違っている場合には修正せよ.

1. 組合せ最適化問題の実行可能解は有限個である.
2. $n$ 点の巡回セールスマン問題の巡回路の数は $2^n$ 通りある.
3. 仕事数 $n$, エージェント数 $m$ の一般化割当問題において，仕事をエージェントに割り当てる割当方の総数（資源制約を満たすか否かは問わない）は $2^{nm}$ 通りある.
4. 欲張り法によってナップサック問題に対する最適解を得ることができる.
5. ある問題例をあるアルゴリズムで解いたところ，得られた解の近似比が 1 であった. したがって，このアルゴリズムは厳密解法であると言える.
6. 近似解法の代表例として，欲張り法，局所探索法，動的計画法，メタ戦略が挙げられる.
7. 整数計画問題は，一般化割当問題の特殊な場合である.
8. 線形計画問題は，変数の一部に実数変数を含む整数計画問題である.
9. 充足可能性問題は，多項式時間で解くことができる.
10. クラス NP とは，多項式時間で解くことができない問題のクラスである.
11. 容量 $b$，要素数 $n$ の 0-1 ナップサック問題は，$O(nb)$ で解くことができるので，クラス P に含まれる.
12. ある問題に対する局所最適解は，近傍の定義に依存しない.
13. 局所探索法を設計するためには，近傍の定義だけを行うだけでよい.

## 問題 2

指数関数について.

1. $10n^3$ と $3^n$ の $n = 1, 2, \ldots, 10$ に対する値を表に書き下せ.
2. アルゴリズム A の計算時間は問題例の規模のみに依存すると仮定し, 規模 $n$ の入力に対する計算時間が $2^n$ であるとする. このアルゴリズムを用いてある計算機で $n = 1000$ の問題例を解くのに 3 秒を要した. 100 倍速い計算機で 3 秒以内に解ける問題例の規模 $n$ （整数）の最大値を求めよ.

## 問題 3

整数計画問題（IP 問題）について．

1. 一般化割当問題を IP 問題として定式化せよ．$z_{ij}$ のように 2 つの添字を持つ変数を用いてよい．目的関数や制約式を決定変数の線形の式で表さなければならないことに留意せよ．

2. 最大充足可能性問題を IP 問題として定式化せよ．0-1 変数 $x_j$ に加えて，各節が充足されたか否かを表現する変数 $y_i$ を用意し，$y_i = C_i(x)$ となることが強制されるような線形不等式制約を考えるとよい．($y_i = C_i(x)$ は論理式なので，もちろんこのままでは IP 問題の制約式とすることはできないことに注意せよ.)

## 問題 4

オーダー表記について

1. （ア）$7N^3 + 123N$，（イ）$5 \cdot 2^N + 7N^{50}$，（ウ）$3N^{0.01} + 17(\log N)^{100}$，（エ）$2N! + 350^{200N} + 5N^{1000}$ をそれぞれオーダー記法を用いて表現せよ．

2. 上述の式がそれぞれ規模 $N$ に対する計算量を表すとき，多項式時間であるものはどれか．全て答えよ．

## 問題 5

0-1 ナップサック問題に対する次の問題例を動的計画法で（表を用いて）解け．

$$\begin{array}{lll} \text{maximize} & 16z_1 + 19z_2 + 23z_3 + 28z_4 & \\ \text{subject to} & 2z_1 + 3z_2 + 4z_3 + 5z_4 \leq 7 & \\ & z_j \in \{0, 1\} & j = 1, 2, 3, 4. \end{array}$$

## 問題 6

0, 1, 2 の 3 つの値を取りうる決定変数 2 つ $z_j \in \{0, 1, 2\}$, $j = 1, 2$ よりなる整数計画問題に対し，全ての解を列挙する生成木をかけ．生成木の枝には分割の際の条件を記すこと．

- 元の問題及び部分問題のそれぞれを 3 つの部分問題に分割する方法による生成木と，
- 元の問題及び部分問題のそれぞれを 2 つの部分問題に分割する方法による生成木

の二通りを考えよ．

## 問題 7

巡回セールスマン問題の以下の問題例に対し，最近近傍法によって得られる巡回路とその距離を示せ．各ステップにおける具体的な動作の様子も簡潔に記すこと．街 1 を出発点とする場合と街 2 を出発点とする場合の 2 通りを考察せよ．問題例: 街の数 $n = 4$, 距離行列

$$(d_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 問題 8

近傍について．

1. 順列 1, 2, 3, 4 に対し，挿入近傍と交換近傍それぞれに含まれる順列を全て書き下せ．
2. 巡回路 1, 2, 3, 4, 5 に対し，2-opt 近傍に含まれる巡回路を全て書き下せ．ただし，対称巡回セールスマン問題を仮定し，1, 2, 3, 4, 5 と 5, 4, 3, 2, 1 は同じ巡回路であるとする．なお，巡回路 1, 2, 3, 4, 5 は 2, 3, 4, 5, 1 や 3, 4, 5, 1, 2 のようにも表せ，同一の巡回路を表す方法が複数通りある．以上をふまえ，同一のものが 2 度重複しないように留意せよ（たとえば街 1 を一番左に書き，街 2 と 3 のうち 2 を 3 よりも左に書くというルールによって表記を統一するとよい）．

## 問題 9

長方形詰め込み問題 (strip packing problem) に対する以下の問題例を考える．長方形数 $n = 5$, 容器 (strip) の幅 $W = 4$, 各長方形 $i$ の幅 $w_i$ と高さ $h_i$ は以下の表の通り．

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $w_i$ | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| $h_i$ | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |

順列によって解を表現し，その順列に従って BL 法を適用した結果を探索解に対応する実行可能解とする探索方法において，探索解 2, 4, 5, 3, 1 および 2, 1, 3, 5, 4 それぞれに対応する実行可能解を図示せよ．

## 問題 10

メタ戦略の名称を 3 つ以上書いて，各々の概要を説明せよ．