<u>メルセンヌ数とフェルマー数</u>

定義. 正整数 n.

- メルセンヌ (Mersenne) 数: $2^n - 1$ と書ける数. M_n と記す.
- フェルマー (Fermat) 数: $2^{2^n} + 1$ と書ける数. F_n と記す.
- メルセンヌ数やフェルマー数が素数の時，それぞれメルセンヌ素数，フェルマー素数という.

M_n を 2 進数で表すと $11\cdots 1$（1 が n 個並ぶ）.

性質. M_n が素数になるのは n が素数の場合に限る.

証明. n が合成数で $n = ks$ $(1 < k < n)$ と書けるなら，

$$2^n - 1 = (2^k)^s - 1 = (2^k - 1)(2^{k(s-1)} + 2^{k(s-2)} + \cdots + 2^k + 1)$$

となるから M_n も合成数. □

注. 逆（n が素数ならば M_n も素数）は成り立つとは限らない.

反例: $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89.$

$n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521$ 等に対して M_n は素数.

メルセンヌ数は巨大素数の発見に用いられる.

メルセンヌ素数は無限にあると予想されているが未解決.

フェルマーは全ての F_n は素数であると予想した（1650 年）.

$F_0, F_1, \ldots, F_4$ は素数だが F_5 は合成数. オイラーの反例 (1732 年発見):

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417.$$

$F_n,\ n \geq 6$ の中に素数が存在するかどうかは未解決（$F_6, F_7, \ldots, F_{11}$ などが合成数であることは分かっている）.