最適化　試験問題

2004. 2. 4

（**注意：** 問題および解答用紙はそれぞれ全部で２ページである．
問１と問２の解答には別々の解答用紙を用い，各々の
解答用紙に名前を書くこと．）

問１． 次の２次計画問題を考える．

$$
\begin{array}{lll}
P: & \text{目的関数：} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{G}\boldsymbol{x} \;\rightarrow\; \text{最小} \\
 & \text{制約条件：} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{b}
\end{array}
$$

ただし，$\boldsymbol{A}$ は $m \times n$ 定数行列，$\boldsymbol{b}$ は m 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{c}$ は n 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{G}$ は $n \times n$ 定数行列，$\boldsymbol{x}$ は n 次元変数ベクトル，$^\top$ は転置記号である．さらに，行列 $\boldsymbol{G}$ は正定値対称と仮定する．

以下の問 (a) – (c) に答えよ．

(a) 問題 P に対する KKT 条件（Karush-Kuhn-Tucker 条件，Kuhn-Tucker 条件）を書け．

(b) 問題 P に対する（Lagrange の）双対問題 D を導け．

(c) 問 (b) の双対問題 D に対する KKT 条件を書け．さらに，それが問 (a) の問題 P に対する KKT 条件と等価であることを示せ．

(問２は次ページ）

問 2.

(ア) 0–1 ナップサック問題

$$\begin{array}{ll} \text{目的関数} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i z_i \to \text{最大} \\ \text{制約条件} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i z_i \leqq b \\ & z_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,\ldots,n \end{array}$$

を考える. c_i (>0) を要素 i の利得, a_i (>0) をサイズ, b (>0) をナップサックのサイズと呼び, $z_i = 1$ $(z_i = 0)$ は要素 i をナップサックに詰める (詰めない) ことを表す. 以下の問 (a) と (b) に答えよ.

(a) $g^*(j, p)$ を, 要素集合 $\{1, 2, \ldots, j\}$ からいくつかを選んだときの合計利得がちょうど p であるときのナップサックに詰める要素の合計サイズの最小値と定義して, 動的計画法の漸化式を立て, その計算量を評価せよ. (**注:** 講義ノートの漸化式とは異なるので注意すること.)

(b) 以下の問題例 $(n = 5)$ に対し, 問 (a) の漸化式を用いて最適解における各変数 z_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ の値を求めよ.

$$\begin{array}{lllll} a_1 = 251 & a_2 = 99 & a_3 = 151 & a_4 = 51 & a_5 = 199 \\ c_1 = 5 & c_2 = 2 & c_3 = 3 & c_4 = 1 & c_5 = 4 \\ b = 349 & & & & \end{array}$$

(イ) 平面上の n (≥ 1) 個の点の座標が与えられたとき, 一辺の長さが 1 の正方形をいくつか平面上に置くことによってすべての点が少なくとも一つの正方形に含まれるようにするとき, 用いる正方形の個数を最小化する問題を考える. なお, 辺上は正方形に含まれる. 正方形は一つの辺が x 軸と平行になるように置く (つまり斜めに置くのは許されない). 以下のアルゴリズム A の近似度が 2 であることを証明せよ. また, アルゴリズム A では近似度が 2 よりもよくならないことを示す簡単な問題例を一つ挙げよ. なお, 便宜上, 平面上の x 座標の小さい側を左, y 座標の小さい側を下というような表現を用いる. (**ヒント:** ステップ 2 で q として選ばれた点の個数と最適値の関係を調べよ.)

アルゴリズム A

ステップ 1 $S := \{$ 与えられた n 個の点 $\}$, $k := 0$ とする.

ステップ 2 点集合 S の中で x 座標の値が最小のもの (複数あるときは任意に選ぶ) を見つけ, それを q とする.

ステップ 3 2 枚の正方形を, 一つは左上の角に点 q が重なるように, もう一つは左下の角に点 q が重なるように平面に置き, $k := k + 2$ とする.

ステップ 4 ステップ 3 で新たに加えた 2 枚の正方形に含まれた点をすべて集合 S から除く.

ステップ 5 $S = \emptyset$ ならば, 用いた正方形の枚数 k を出力して停止. さもなければステップ 2 に戻る.

以上